5. Vectores aleatorios

Imaginemos que el resultado de un experimento aleatorio no tiene solo una variable, sino muchas variables que puede ser de interes

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$$

Por ejemplo

Para monitorear el estado de la pandemia por COVID-19 la secretaría de salud monitorea muchas variables de los enfermos por COVID-19

$$\left.\begin{array}{l} X_1 - \text{diabetes} \\ X_2 - \text{enfermedad del corazon} \\ X_3 - \text{obesidad} \end{array}\right\} \text{Comorbilidades}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_4 - \text{Dolor de Pecho} \\ X_5 - \text{Dificultad para respirar} \end{array}\right\} \text{sintomas}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_6 - \text{Hospitalizacion} \end{array}\right\} \text{consecuencias}$$

$$X_7 - \text{Fallecimiento}$$

Cada una de estas variables puede ser 0 ó 1 y podemos analizarlas por separado con las herramientas que tenemos. Podríamos asumir que cada una de estas v.a es $X_j \sim \text{Bernoulli}(p_j)$. Sin embargo existen preguntas de sumo interes que no podríamos contestar

1: La presencia de cierta comorbilidades, ¿hace más susceptibles a estos pacientes a terminar hospitalizados?

2: La presencia de cierta comorbilidad combinadas con ciertos síntomas, ¿nos indica que un paciente tiene un riesgo muy alto de fallecer?

3: De forma general, si existen variables que interactúan con otras. ¿Podemos analizar cada variable por separado, como si las otras no existieran sin cometer errores garrafales?

4: Si aceptamos que es necesario considerar estas variables de manera conjunta, ¿cómo podemos hacerlo?

5: ¿Cómo podemos describir las interacciones entre diferentes variables aleatorias de forma resumida?

Para poder describir varios fenómenos aleatorios de manera "conjunta" es necesario extender el concepto de variable aleatoria.

Definición: v.a. bivariadas

Dado un experimento aleatorio en Ω y una probabilidad P, sea una función X definida en Ω que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ uno y solo un par $(X_1(\omega), X_2(\omega))$. Esta función será una v.a. bivariada.

$$V = \{ (x_1, x_2) \mid X_1(\omega) = x_1 \, , \, X_2(\omega) = x_2 \text{ con } \omega \in \Omega \}$$

El ejemplo más fácil

Lanzamos una moneda 2 veces

1: ¿Ω?

2: $X = (X_1, X_2)$

X_1 = número de soles en el primer lanzamiento

X_2 = número de soles en los dos lanzamientos

$$\Omega = \{ (A,A), (A,S), (S,A), (A,A) \}$$

$$V = \{ (0,0), (0,1), (1,1), (1,2) \}$$

$$P((A,A)) = P_X(0,0) = 1/4$$

$$P((A,S)) = P_X(0,1) = 1/4$$

$$P((S,A)) = P_X((1,1)) = 1/4$$

$$P((A,A)) = P_X((1,2)) = 1/4$$

Generalmente se usa la notación (X, Y) sin embargo el sub índice nos permite generalizar trivialmente

Definición: v.a. multivariadas

Dado un experimento aleatorio en Ω y con probabilidad P definida en sus subconjuntos. Sea X una función que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ una única n-tupla

$$(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

a cada elemento $\omega \in \Omega$.

$\Rightarrow X$ es un vector aleatorio n-variado.

Distribuciones multivariadas

Trabajaremos el caso bivariado, los resultados se generalizan fácilmente al caso general. Del ejemplo de los volados tenemos

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/4, & (x_1, x_2) = (0,0) \\ 1/4, & (x_1, x_2) = (1,0) \\ 1/4, & (x_1, x_2) = (1,1) \\ 1/4, & (x_1, x_2) = (1,2) \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Claramente $f(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall \; x_1, x_2$

y además

$$\sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{2} f(x_1,x_2) = 1$$

Definición (distribución conjunta discreta)

Sea $X = (X_1, X_2)$ una v.a. bivariada discreta y V el conjunto en donde X toma valores. Si la función f cumple

1: $f(x_1,x_2) \geq 0 \quad \forall \; x_1, x_2 \in V$

2: $\sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1,x_2) = 1$

3: $f(x_1,x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$

$\Rightarrow$ f es la función de distribución de probabilidad discreta de la v.a. $X = (X_1, X_2)$

y en este caso

$$F(x_1,x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

x_2

x_1	0	1	2
0	1/4	1/4	0
1	0	1/4	1/4

$F(0,1) = 1/2$

$F(1,1) = 3/4$

En el caso en el que $\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ sea un vector continuo bivariado que tome valores en V

1: $f(x_1, x_2) \geq 0; \quad \forall x_1, x_2$

2: f tiene a lo más un número finito de discontinuidades

3: La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$$

4: $P_{\underline{X}}(A) = \iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ para $A \subset V$

en este caso

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dx_2} F(x_1, x_2)$$

$$P(a_1 \leq \underline{X}_1 \leq a_2,\ b_1 \leq \underline{X}_2 \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

La confiabilidad de un sistema de control de temperatura para un reactor de polímero (una especie de cocina en donde se mezclan y calientan diferentes químicos para crear plásticos) se sabe depende de

X_1 - la vida útil en años de la consola electrónica de control

X_2 - la válvula de control la salida de agua de enfriamiento.

Si uno de estos componentes falla, todo el sistema falla.

La distribución conjunta del fenómeno aleatorio bidimensional está dada por

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{50} e^{-\frac{1}{10}(2x_1+x_2)} \qquad 0<x_1<\infty \;\; y \;\; 0<x_2<\infty$$

1) Verifica que es una función de distribución de probabilidad válida

2) Obtén la probabilidad de que ambos componentes funcionen por más de 2 años.

1) P.D. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$$

$$\frac{1}{50}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{10}x_1} e^{-\frac{1}{10}x_2}\, dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{50}\left(\cancel{\int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{10}x_1}\, dx_1} ?\right)\left(\cancel{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{10}x_2}\, dx_2} ?\right)$$

$$= \frac{1}{50}\left(\frac{10}{2}\right)(10) = 1$$

2) $P(X_1 > 2, X_2 > 2)$

$$= \frac{1}{50}\int_2^\infty \int_2^\infty e^{-\frac{2}{10}x_1} e^{-\frac{1}{10}x_2} \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \frac{1}{50}\left(\int_2^\infty e^{-\frac{2}{10}x_1} \, dx_1\right)\left(\int_2^\infty e^{-\frac{1}{10}x_2} \, dx_2\right)$$

$$= \left(\int_2^\infty \frac{2}{10} e^{-\frac{2}{10}x_1} \, dx_1\right)\left(\int_2^\infty \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x_2} \, dx_2\right)$$

$$= \left(1 - F_{X_1}(2)\right)\left(1 - F_{X_2}(2)\right)$$

$$= \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{10}2}\right)\right)\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10}2}\right)\right)$$

$$\frac{6}{10} = \frac{(2)(3)}{(2)(5)}$$

$$= e^{-\frac{4}{10}} e^{-\frac{2}{10}} = e^{-3/5}$$